14.11.23

Математика

Тема: «Перпендикулярность в пространстве»

Делаем конспект. Основные определения и теоремы записываем словами, буквами и иллюстрируем рисунком. Номера 116-118.

Глава II
Перпендикулярность прямых и плоскостей

§ 1 Перпендикулярность прямой и плоскости

15 Перпендикулярные прямые в пространстве

Две прямые в пространстве называются **перпендикулярными** (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен 90°. Перпендикулярность прямых a и b обозначается так: $a \perp b$. Перпендикулярные прямые могут пересекаться и могут быть скрещивающимися. На рисунке 43 перпендикулярные прямые a и b пересекаются, а перпендикулярные прямые a и c скрещивающиеся. Докажем лемму о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой.

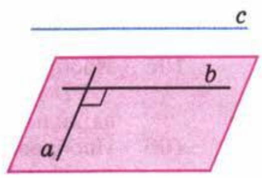


Рис. 43

Лемма

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

Доказательство

Пусть $a \parallel b$ и $a \perp c$. Докажем, что $b \perp c$. Через произвольную точку M пространства, не лежащую на данных прямых, проведем прямые MA и MC, параллельные соответственно прямым a и c (рис. 44). Так как $a \perp c$, то $\angle AMC = 90°$.

По условию $b \parallel a$, а по построению $a \parallel MA$, поэтому $b \parallel MA$. Итак, прямые b и c параллельны соответственно прямым MA и MC, угол между которыми равен 90°. Это означает, что угол между прямыми b и c также равен 90°, т. е. $b \perp c$. Лемма доказана. △

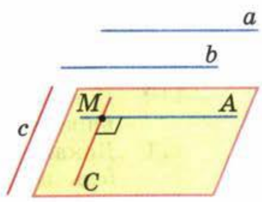


Рис. 44

16 Параллельные прямые, перпендикулярные к плоскости

Определение

Прямая называется **перпендикулярной к плоскости**, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Перпендикулярность прямой a и плоскости α обозначается так: $a \perp \alpha$. Говорят также, что **плоскость α перпендикулярна к прямой a.**

Если прямая a перпендикулярна к плоскости α, то она пересекает эту плоскость. В самом деле, если бы прямая a не пересекала плоскость α, то она или лежала бы в этой плоскости, или была бы параллельна ей. Но тогда в плоскости α имелись бы прямые, не перпендикулярные к прямой a, например прямые, параллельные ей, что противоречит определению перпендикулярности прямой и плоскости. Значит, прямая a пересекает плоскость α.

На рисунке 45 изображена прямая a, перпендикулярная к плоскости α.

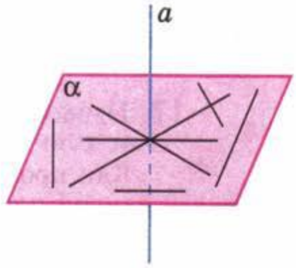


Рис. 45

Окружающая нас обстановка дает много примеров, иллюстрирующих перпендикулярность прямой и плоскости. Непокосившийся телеграфный столб стоит прямо, т. е. перпендикулярно к плоскости земли. Так же расположены колонны здания по отношению к плоскости фундамента, линии пересечения стен по отношению к плоскости пола и т. д.

Докажем две теоремы, в которых устанавливается связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости.

Теорема

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.

Доказательство

Рассмотрим две параллельные прямые a и a_1 и плоскость α, такую, что $a \perp \alpha$. Докажем, что и $a_1 \perp \alpha$.

Проведем какую-нибудь прямую x в плоскости α (рис. 46). Так как $a \perp \alpha$, то $a \perp x$. По лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей $a_1 \perp x$. Таким образом, прямая a_1 перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости α, т. е. $a_1 \perp \alpha$. Теорема доказана.

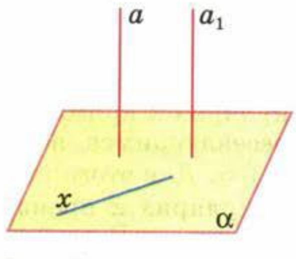


Рис. 46

Докажем обратную теорему.

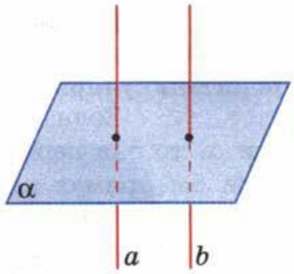
Теорема

Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

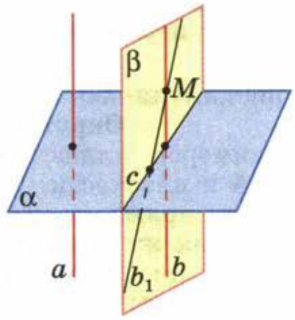
Доказательство

Рассмотрим прямые a и b, перпендикулярные к плоскости α (рис. 47, *а*). Докажем, что $a \parallel b$.

Через какую-нибудь точку M прямой b проведем прямую b_1, параллельную прямой a. По предыдущей теореме $b_1 \perp \alpha$. Докажем, что прямая b_1 совпадает с прямой b. Тем самым будет доказано, что $a \parallel b$. Допустим, что прямые b и b_1 не совпадают. Тогда в плоскости β, содержащей прямые b и b_1, через точку M проходят две прямые, перпендикулярные к прямой c, по которой пересекаются плоскости α и β (рис. 47, *б*). Но это невозможно, следовательно, $a \parallel b$. Теорема доказана. △



а)



б)

Рис. 47

17 Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Как проверить, перпендикулярна ли данная прямая к данной плоскости? Этот вопрос имеет практическое значение, например, при установке мачт, колонн зданий и т. д., которые нужно поставить прямо, т. е. перпендикулярно к той плоскости, на которую они ставятся. Оказывается, что для этого нет надобности проверять перпендикулярность по отношению к любой прямой, как о том говорится в определении, а достаточно проверить перпендикулярность лишь к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости. Это вытекает из следующей теоремы, выражающей признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Теорема

Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Доказательство

Рассмотрим прямую a, которая перпендикулярна к прямым p и q, лежащим в плоскости α и пересекающимся в точке O (рис. 48, *а*). Докажем, что $a \perp \alpha$. Для этого нужно доказать, что прямая a перпендикулярна к произвольной прямой m плоскости α.

Рассмотрим сначала случай, когда прямая a проходит через точку O (рис. 48, *б*). Проведем через точку O прямую l, параллельную прямой m (если прямая m проходит через точку O, то в качестве l возьмем саму прямую m). Отметим на прямой a точки A и B так, чтобы точка O была серединой отрезка AB, и проведем в плоскости α прямую, пересекающую прямые p, q и l соответственно в точках P, Q и L. Будем считать для определенности, что точка Q лежит между точками P и L (рис. 48, *б*).

Так как прямые p и q — серединные перпендикуляры к отрезку AB, то $AP = BP$ и $AQ = BQ$. Следовательно, $\triangle APQ = \triangle BPQ$ по трем сторонам. Поэтому $\angle APQ = \angle BPQ$.

Сравним треугольники APL и BPL. Они равны по двум сторонам и углу между ними ($AP = BP$, PL — общая сторона, $\angle APL = \angle BPL$), поэтому $AL = BL$. Но это означает, что треугольник ABL равнобедренный и его медиана LO является высотой, т. е. $l \perp a$. Так как $l \parallel m$ и $l \perp a$, то $m \perp a$ (по лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей). Итак, прямая a перпендикулярна к любой прямой m плоскости α, т. е. $a \perp \alpha$.

Рассмотрим теперь случай, когда прямая a не проходит через точку O. Проведем через точку O прямую a_1, параллельную прямой a. По упомянутой лемме $a_1 \perp p$ и $a_1 \perp q$, поэтому по доказанному в первом случае $a_1 \perp \alpha$. Отсюда (по первой теореме п. 16) следует, что $a \perp \alpha$. Теорема доказана.

Воспользуемся признаком перпендикулярности прямой и плоскости для решения следующей задачи.

Задача

Доказать, что через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой.

Решение

Обозначим данную прямую буквой a, а произвольную точку пространства — буквой M. Докажем, что существует плоскость, проходящая через точку M и перпендикулярная к прямой a.

Проведем через прямую a две плоскости α и β так, чтобы $M \in \alpha$ (рис. 49)*. В плоскости α через точку M проведем прямую p, перпендикулярную к прямой a, а в плоскости β через точку пересечения прямых p и a проведем прямую q, перпендикулярную к прямой a. Рассмотрим плоскость γ, проходящую через прямые p и q. Плоскость γ является искомой, так как прямая a перпендикулярна к двум пересекающимся прямым p и q этой плоскости.

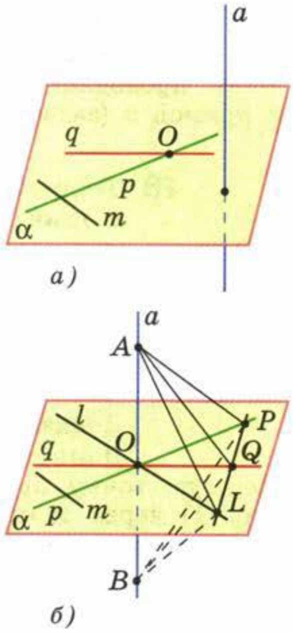


Рис. 48

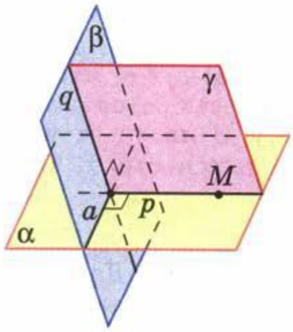


Рис. 49

* На рисунке 49 изображен тот случай, когда точка M не лежит на прямой a. Однако приведенное решение задачи пригодно и для того случая, когда точка M лежит на прямой a.

Замечание

Можно доказать, что γ — единственная плоскость, проходящая через точку M и перпендикулярная к прямой a (задача 133).

18 Теорема о прямой, перпендикулярной к плоскости

Теорема

Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.

Доказательство

Данную плоскость обозначим α, а произвольную точку пространства — буквой M. Докажем, что: 1) через точку M проходит прямая, перпендикулярная к плоскости α; 2) такая прямая только одна.

1) Проведем в плоскости α произвольную прямую a и рассмотрим плоскость β, проходящую через точку M и перпендикулярную к прямой a (рис. 50). Обозначим буквой b прямую, по которой пересекаются плоскости α и β. В плоскости β через точку M проведем прямую c, перпендикулярную к прямой b. Прямая c и есть искомая прямая. В самом деле, она перпендикулярна к плоскости α, так как перпендикулярна к двум пересекающимся прямым этой плоскости ($c \perp b$ по построению и $c \perp a$, так как $\beta \perp a$).

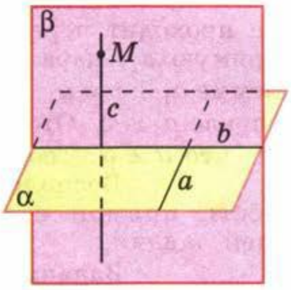


Рис. 50

2) Предположим, что через точку M проходит еще одна прямая (обозначим ее через c_1), перпендикулярная к плоскости α. Тогда (по обратной теореме п. 16) $c_1 \parallel c$, что невозможно, так как прямые c_1 и c пересекаются в точке M. Таким образом, через точку M проходит только одна прямая, перпендикулярная к плоскости α. Теорема доказана. △

Задачи

116 Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что:
а) $DC \perp B_1C_1$ и $AB \perp A_1D_1$, если $\angle BAD = 90°$;
б) $AB \perp CC_1$ и $DD_1 \perp A_1B_1$, если $AB \perp DD_1$.

117 В тетраэдре $ABCD$ $BC \perp AD$. Докажите, что $AD \perp MN$, где M и N — середины ребер AB и AC.

118 Точки A, M и O лежат на прямой, перпендикулярной к плоскости α, а точки O, B, C и D лежат в плоскости α. Какие из следующих углов являются прямыми: $\angle AOB$, $\angle MOC$, $\angle DAM$, $\angle DOA$, $\angle BMO$?